



## Α' Λυκείου/ Άλγεβρα/ Οι πραγματικοί αριθμοί/ Διάταξη πραγματικών αριθμών

### Λυμένες Ασκήσεις

1. Αν  $3 < \alpha < 4$  και  $6 < \beta < 7$  να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων :

- i)  $\alpha + \beta$
- ii)  $\alpha - \beta$
- iii)  $\alpha^2 + \beta^2$

#### Λύση

- i) Προσθέτουμε κατά μέλη τις δυο ανισοτικές σχέσεις και θα έχω  $9 < \alpha + \beta < 11$ .
- ii) Πολλαπλασιάζουμε με  $-1$  την δεύτερη σχέση και θα έχουμε  $-6 > -\beta > -7$  ή  $-7 < -\beta < -6$  και προσθέτοντας τις δυο σχέσεις θα έχουμε τελικά  $-4 < \alpha - \beta < -2$ .
- iii) Έχω  $9 < \alpha^2 < 16$  και  $36 < \beta^2 < 49$ . Προσθέτοντας τις δυο σχέσεις θα έχουμε  $45 < \alpha^2 + \beta^2 < 65$

2. Να δείξετε ότι:  $x^2 + y^2 \geq 2x - 1$

#### Λύση

Θα ξεινήσουμε από την ίδια την ανισότητα και με ισοδυναμίες θα καταλήξουμε σε μια σχέση που ισχύει.

$x^2 + y^2 \geq 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 \geq 0$ , που ισχύει επομένως ισχύει και η αρχική.

3. Αν  $\alpha - \beta = 4$  να δειχτεί  $\alpha\beta \geq -4$

#### Λύση

$$\alpha = \beta + 4 \text{ και αντικαθιστώ στην } (\beta + 4)\beta \geq -4 \Leftrightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\beta + 2)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει άρα ισχύει και η αρχική}$$